

Um modelo de opções reais com jogos aplicado ao mercado imobiliário residencial do Rio de Janeiro

Glaudiane Lilian de Almeida¹

¹Universidade Federal Fluminense e Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia de Produção e Departamento de Engenharia Industrial, Rio de Janeiro, Brasil

Marco Antonio Guimarães Dias²

²Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, Rio de Janeiro, Brasil

Luiz Eduardo Teixeira Brandão³

³Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Administração e Departamento de Engenharia Industrial, Rio de Janeiro, Brasil

Carlos Patricio Mercado Samanez⁴ (in memoriam)

⁴Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Administração e Departamento de Engenharia Industrial, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo

Objetivo – Determinar a estratégia ótima de investimento em equilíbrio de Nash para o mercado imobiliário residencial do Rio de Janeiro, considerando a incerteza na demanda por imóveis e o número de concorrentes ativos no mercado.

Metodologia – Foi desenvolvido um modelo de jogos de opções reais. Os parâmetros do modelo foram estimados com ferramentas econométricas a partir de dados reais do mercado imobiliário carioca.

Resultados – Os resultados quantitativos obtidos são intuitivos no sentido de que, quanto maior a quantidade de concorrentes, menor o nível de demanda exigido para o investimento em novas unidades, e quanto maior a volatilidade da demanda, maior o nível de demanda para ser ótimo o investimento.

Contribuições – Este trabalho modificou a metodologia de Grenadier (2002), fornecendo uma especificação mais adequada e robusta da incerteza para a função de demanda, permitindo interpretações econômicas mais intuitivas.

Palavras-chave – Opções Reais. Teoria dos Jogos. Investimento sob incerteza. Oligopólios.

Recebimento:

02/09/2016

Aprovação:

09/05/2018

Editor responsável:

Prof. Dr. Eduardo Contani

Avaliado pelo sistema:

Double Blind Review



Revista Brasileira de Gestão e Negócios

DOI: 10.7819/rbgn.v21i1.3966

I Introdução

Decisões de investimento são influenciadas pela concorrência estratégica entre empresas que atuam no mesmo setor da economia. Cada empresa avalia suas vantagens comparativas frente a seus concorrentes e às condições de mercado, como valor do produto, volatilidade dos fluxos de receitas e participação de mercado (monopólio, duopólio ou oligopólio), que afetam diretamente os resultados. Nesse sentido, o investimento em mercados competitivos pode ser visto como um jogo entre as empresas, uma vez que, na tomada de decisões de investimento, as empresas implicitamente levam em conta as reações das outras empresas a suas próprias ações de investimento. Como assinala Porter (1992), o investimento é o fator mais importante da vantagem competitiva.

Essas decisões são tradicionalmente analisadas com base no método do Fluxo de Caixa Descontado (FCD), que consiste em projetar os fluxos de caixa futuros esperados e descontá-los à taxa ajustada ao risco do projeto. Uma desvantagem desse método, no entanto, é sua natureza simplista e estática, que não captura o valor das flexibilidades gerenciais (opções reais) e estratégicas e ignora as reações das empresas concorrentes.

Por ter características de opções, essas flexibilidades somente podem ser avaliadas usando-se métodos de apreçamento de opções, como a metodologia de Opções Reais (OR), que modela as incertezas dinâmicas exógenas da economia (como a demanda de produtos), e as flexibilidades da empresa para se adaptar às mudanças de cenário. As OR não consideram de forma endógena, no entanto, as possíveis interações competitivas. Por outro lado, a Teoria dos Jogos analisa como as empresas tomam decisões quando estão cientes de que suas ações afetam as empresas rivais e que estas irão reagir de forma racional às ações dos rivais. Por conseguinte, uma combinação de Opções Reais com Teoria dos Jogos tem o potencial de gerar resultados promissores para a análise da decisão de investimento, dada a complementaridade entre essas duas teorias.

A escolha do momento ideal para exercer a opção de investir é fundamental para criação de valor na empresa e obtenção de vantagens competitivas. Adicionalmente, as decisões entre investir ou abandonar um projeto envolvem diferentes riscos e incertezas, principalmente em ambientes competitivos, nos quais as empresas podem ter diferentes políticas de investimento ótimo quando comparadas a uma empresa monopolista. Essa interseção da teoria dos jogos com a teoria de opções reais é denominada jogos de opções reais, em que a competição é modelada de forma endógena e a entrada do competidor é feita de forma racional, e não aleatória, além de considerar as incertezas (processos estocásticos) e as flexibilidades (OR).

No caso clássico de opções reais, as firmas são apenas tomadoras de preços e detêm o monopólio da opção de investir, não sendo levado em consideração o fato de que a competição pode afetar o valor da opção real e a regra de decisão. Em jogos de opções reais, o problema de maximização de valor da firma leva em consideração a presença de outras firmas como jogadores, que reagem otimamente aos processos estocásticos relevantes e às ações das outras firmas, possibilitando a modelagem da competição de forma endógena.

Conforme ressaltado por Grenadier (2002), uma questão comum na maioria dos trabalhos que aplicam as ferramentas da Teoria das Opções Reais é a ausência de uma análise a respeito das interações estratégicas dos detentores das opções, em que a regra ótima de investimento depende da reação dos competidores à realização do projeto. Assim, os jogos com opções reais são vistos como uma forma para superar as limitações das metodologias citadas anteriormente.

O objetivo deste trabalho é determinar a estratégia ótima de investimento em equilíbrio de Nash para o mercado imobiliário residencial de uma região do Rio de Janeiro, considerando a incerteza na demanda por imóveis e o número de concorrentes ativos no mercado.

Para tanto, foi adotada uma versão modificada da metodologia de Grenadier (2002) com uma especificação mais adequada e robusta da incerteza para a função de demanda. Ao contrário de estudos anteriores, nos quais a modelagem

tradicional das incertezas era concentrada em torno de choques multiplicativos na função de demanda, aqui será visto que a incerteza na demanda é modelada a partir de um choque estocástico multiplicativo em sua inclinação, que inclui uma elasticidade do fator estocástico da demanda.

O artigo está organizado da seguinte forma. Após esta introdução, a seção 2 apresenta uma breve revisão da literatura e, em seguida, a seção 3 desenvolve o modelo de jogos de opções. A seção 4 faz uma aplicação do modelo proposto ao mercado residencial da cidade do Rio de Janeiro. A seção 5 traz os resultados e, em seguida, estão apresentadas as conclusões. Um apêndice apresenta alguns desenvolvimentos matemáticos intermediários.

2 Revisão da literatura

O primeiro trabalho a abordar as contribuições da combinação da Teoria dos Jogos com a Teoria das Opções Reais é atribuído a Smit e Ankum (1993), no qual demonstraram que a competição entre as empresas implica a diminuição do valor da espera, levando-as a investir mais precocemente. Dixit e Pindyck (1994) desenvolveram um modelo básico de jogos de opções reais para mercados em duopólio, em que avaliaram o *timing* do investimento. Huisman (2000) propôs modelos inovadores de jogos de opções reais adicionando à literatura, entre outras contribuições, o efeito da incerteza tecnológica sobre a opção de investir. Chevalier-Roignant e Trigeorgis (2011) são mais centrados em outros aspectos da modelagem de opções reais, como o comportamento do investidor míope e expansão da capacidade.

As aplicações que utilizam estruturas concorrenciais a partir de oligopólios foram estudadas por Baldursson (1998) e Grenadier (2002), baseando-se no resultado denominado “miopia ótima” para o equilíbrio competitivo descoberto por Leahy (1993), como assinala Dixit e Pindyck (1994), em que o gatilho de investimento (nível de demanda) ótimo do caso monopolista coincide com o do caso de competição perfeita, embora por motivos

diferentes. No caso de oligopólio em Grenadier (2002), com uma função demanda modificada é possível usar o conceito de miopia ótima para obter a solução em oligopólio, o que será usado nesse artigo. Murto, Näsäkkälä, e Keppo (2004) analisaram um jogo para oligopólios com demanda estocástica, mas em tempo discreto. Aguerrevere (2009) examinou a forma como a concorrência afeta a relação entre as decisões de investimento e as dinâmicas de retorno dos ativos, ao passo que Thijssen, Huisman, e Kort (2012) trataram do caso de estratégias de equilíbrio simétrico para um duopólio e mostraram que, quando ambas as firmas pretendem ser as primeiras a investir, podem existir problemas de coordenação e exercício subótimo das opções de investir.

No Brasil, Costa, Azevedo e Samanez (2015) estudaram o impacto da preempção em jogos de momento ótimo para um oligopólio assimétrico aplicado no mercado brasileiro de latas de alumínio, e mostraram que as empresas precisam antecipar seus investimentos quando existe a ameaça de preempção no mercado, em relação ao caso sem concorrentes.

Titman (1985) foi o pioneiro na aplicação da metodologia de opções reais para o mercado imobiliário, e analisou uma opção de adiamento de investimentos imobiliários em terrenos urbanos. Williams (1991) considerou uma opção de abandono como alternativa ao desenvolvimento de terrenos, ao passo que Quigg (1993) e Holland, Ott e Riddiough (2000) forneceram evidências empíricas que demonstraram que os modelos baseados no conceito de opções reais podem ser úteis para prever valores de propriedade nos mercados imobiliários.

Na literatura internacional, foram encontrados trabalhos que conjugam Opções Reais com Teoria dos Jogos, como o de Williams (1993), que derivou estratégias de exercício no equilíbrio simétrico, aplicando o modelo no mercado imobiliário. Grenadier (1996) desenvolveu um jogo de equilíbrio para estratégias de exercícios de opções reais, sugerindo uma explicação de por que alguns mercados podem experimentar *booms* de construção frente à diminuição da demanda e à desvalorização dos preços. Grenadier (2005) fez uma análise de

equilíbrio para contratos de arrendamento de imóveis usando um modelo de jogos de opções reais, numa abordagem de equilíbrio unificada para avaliar uma grande variedade de contratos de locação de imóveis comerciais.

Wang e Zhou (2006) trabalharam com demanda e custos de construção estocásticos em um modelo com múltiplos desenvolvedores imobiliários, em que a opção de construir um imóvel poderia ser exercida sequencial ou simultaneamente. Esses autores incorporaram assimetrias na capacidade de produção, permitindo examinar o impacto do poder de mercado nas estratégias de exercício das opções.

Na literatura nacional de OR, encontramos os trabalhos de Rocha, Salles, Garcia, Sardinha e Teixeira (2007) e Fortunato, Brandão, Rozenbaum e Rebello (2008), que aplicaram a Teoria das Opções Reais no setor imobiliário carioca. A abordagem de Rocha *et al.* (2007) partiu de um modelo de opções reais em tempo discreto para identificar a estratégia ótima para investimentos simultâneos ou sequenciais. Esse modelo permitiu determinar o valor máximo a ser pago pelos direitos exclusivos sobre o uso de um terreno. Fortunato *et al.* (2008) utilizaram a teoria das opções reais para determinar o valor da opção de abandono durante o período de construção do investimento em um imóvel residencial adquirido na planta, considerando diferentes níveis de devolução dos valores já pagos pelo comprador. Esses dois trabalhos não consideraram o efeito da competição de forma endógena, como aqui. Já Costa e Samanez (2008), como aqui, analisaram o mercado imobiliário do Rio de Janeiro sob a ótica dos jogos de opções reais, onde buscaram determinar o equilíbrio entre a oferta e a demanda comparando com o ciclo real de negócios do mercado imobiliário. Além de trabalharem com uma amostra pouco representativa para o Rio de Janeiro, utilizaram valores arbitrários e exógenos como *proxy* para suas estimativas, assim como a maioria dos estudos que aplicaram modelos de jogos de opções reais.

A quantificação das pressões competitivas pode ser vista no cálculo dos gatilhos que variam de acordo com o número de empresas, demonstrando que as empresas vão exercer mais cedo suas opções

de investimento em novas construções, à medida que novos concorrentes entram no mercado. Este trabalho se diferencia de outros já existentes quando modificou o modelo de Grenadier (2002) a partir da especificação da função de demanda com formato particularmente mais robusto, permitindo interpretações econômicas mais intuitivas. Ao melhor de nosso conhecimento, este é o primeiro trabalho de jogos de opções reais que faz uso de uma função de demanda estocástica em que a variável estocástica altera a inclinação da curva de demanda. Além disso, aqui os parâmetros do modelo foram estimados com ferramentas econométricas a partir de dados reais do mercado imobiliário, ao contrário de diversos modelos de jogos de OR que usaram valores exógenos para os parâmetros, que podem ser escolhas subjetivas e arbitrárias desses valores. Tal situação pode ser encontrada em trabalhos como Grenadier (1996), Grenadier (2000), Grenadier (2002) e Grenadier (2005).

3 Modelo

O modelo de Grenadier (2002) foi utilizado por se tratar de um modelo clássico sobre o tema. Além de desenvolver uma abordagem original com respeito à estrutura de competição para oligopólios, Grenadier (2002) obteve uma solução analítica para o caso de oligopólio como um problema de otimização de um único agente, o que facilita sobremaneira a análise. O choque estocástico proposto na demanda modificada usada neste artigo inclui um parâmetro que representa a elasticidade do fator estocástico da demanda, o que permitiu interpretações econômicas melhores quando comparadas ao trabalho de Grenadier. Além disso, os parâmetros da demanda foram estimados a partir de dados reais, ao contrário da maioria dos trabalhos de jogos de opções reais, conforme já destacado.

O modelo desenvolvido nesta seção considera uma indústria oligopolista com n firmas iguais, em que o número de firmas é fixo, mas cada uma pode produzir mais de uma unidade. Nesse oligopólio, cada firma possui uma sequência de oportunidades de investimento equivalentes a opções de compra americanas

perpétuas. Embora construções imobiliárias demorem um tempo para serem finalizadas (*time to build*), para efeitos de simplificação assumimos que as construções serão imediatas (ou que os valores já estão em valor presente na data de exercício), e que a empresa *i* produz $q_i(t)$ unidades de um produto infinitamente divisível.

Baseando-se em conceitos da Teoria dos Jogos como o equilíbrio perfeito de Cournot-Nash, as estratégias são quantidades e o mercado fornece o preço de equilíbrio para cada estado da demanda. Os investidores imobiliários consideram as quantidades Q_{-i}^* como as melhores respostas dos competidores e maximizam seus lucros ao escolher as quantidades a serem produzidas $q_i^*(t) = 1, 2, \dots, n$. Com firmas iguais, têm-se equilíbrios de Nash (EN) simétricos e a produção ótima de cada empresa nesse oligopólio simétrico em EN é $q_i^*(t) = Q^*(t)/n$.

O processo de oferta da indústria é $Q(t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)$, e a oferta de todas as firmas, com exceção da firma *i*, é dada por $Q_{-i}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j(t)$. Dado o estado atual da indústria, o fluxo de lucro da firma *i* é determinado pela Eq. $q_i^*(t) = Q^*(t)/n$:

$$\pi_i(X(t), q_i(t), Q_{-i}(t)) \equiv q_i(t) \times D(X(t), q_i(t), Q_{-i}(t))$$

A função demanda *D* é tal que as condições $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial X \partial q_i} > 0$ e $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$ são válidas para todo *i*. Em qualquer instante do tempo, cada empresa pode investir em capacidade adicional a fim de aumentar sua produção por um incremento infinitesimal $dq_i \equiv dQ/n$. Se todas

as firmas aumentarem sua capacidade de forma simultânea, $Q(t)$ sofrerá um aumento equivalente à dQ .

O custo desse incremento é linear, de forma que esse aumento envolve um custo *K* por unidade produzida. A opção de aumentar a capacidade é exercida pela firma *i* quando $X(t)$, que representa o choque multiplicativo na demanda, atingir o gatilho $X_i^*(q_i, Q_{-i})$. O choque exógeno da demanda $X(t)$ segue um processo de difusão estocástico na forma da Eq. (2):

$$dX = \mu(X, t)dt + \sigma(X, t)dz \quad (2)$$

em que $z(t)$ é o processo de Wiener padrão. Se $\mu(X, t) = \mu X$ e $\sigma(X, t) = \sigma X$, então $X(t)$ segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), com distribuição lognormal. Como é padrão na literatura, o fluxo de caixa é avaliado na medida neutra ao risco, e por isso a taxa de desconto tem de ser a taxa livre de risco *r*. O preço unitário $P(t)$ é dado pela função demanda inversa $P(t) = D[X(t), Q(t)]$. Essa função será especificada no item 3.2.

3.1 Composição do modelo de equilíbrio

De acordo com a proposição 1 de Grenadier (2002), o valor de equilíbrio de cada firma *i* será descrito como $V^i(X, q_i, Q_{-i})$. A estratégia de investimento no EN para cada empresa é caracterizada por um acréscimo incremental de sua produção toda vez que atingir um gatilho (certo nível de demanda). A equação diferencial ordinária (EDO) do valor da firma $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ é dada pela Eq. (3). Sua derivação está descrita no Apêndice I.

$$\frac{1}{2} \sigma^2(X, t)^2 V_{xx}^i + \mu(X, t) V_x^i - rV^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) = 0 \quad (3)$$

A Eq. (3) trata-se de uma perpetuidade, sendo $V_t^i = 0$, que é uma característica dos projetos imobiliários, em que a opção de compra é perpétua, não existe data limite para exercício da opção. As condições de contorno são:

- i) Condição de continuidade (*value matching*): no gatilho, o valor da espera (solução da EDO) é igual ao *payoff* de exercício da opção. Ou seja, se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = K$ - condição no gatilho ótimo da firma i , que exerce sua opção em X^* , expandindo sua produção em dq_i , investindo Idq_i .
- ii) Condição de suavidade (*smooth-pasting*): se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$ - condição de exercício ótimo da firma i , ou seja, no gatilho ótimo de investir, as derivadas do valor da espera e do *payoff* de exercício também são iguais.
- iii) Condição de continuidade no gatilho dos concorrentes, que no caso simétrico são os mesmos X^* : se $X(t) = X^*(q_i, Q_{-i})$; $V_{q_i}^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = 0$, pois $V^i(X^*, q_i, Q_{-i}) = V^i(X^*, q_i, Q_{-i} + dQ_{-i})$. Essa é uma condição de interação estratégica, requerendo que cada firma i maximize seu valor $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ considerando as estratégias dos competidores. Essa condição, entretanto, não será necessária, conforme Grenadier mostra em sua

proposição 2, ampliando assim o conceito de miopia ótima para oligopólios.

A EDO (Eq. (3) e as três condições de contorno compõem a proposição 1 de Grenadier, que sumariza o equilíbrio. Considerando tempo contínuo e um cenário de equilíbrio perfeitamente competitivo (Leahy, 1993), demonstrou que a política de investimento de cada firma é idêntica à estratégia míope, em que a empresa ignora o efeito que os competidores exercem no valor das opções. Assim, desenvolve-se a estratégia de exercício como se a firma estivesse sozinha no mercado e, assim, tendo uma estratégia míope de exercício das opções reais. Com isso, o equilíbrio pode ser estabelecido com apenas duas condições de contorno (continuidade e suavidade).

Denota-se o valor da firma míope por $M^i(X, q_i, Q_{-i})$. Seja o valor marginal da produção da firma míope $m^i(X, q_i, Q_{-i})$ dado pela Eq. (4):

$$m^i(X, q_i, Q_{-i}) = \partial M^i(X, q_i, Q_{-i}) / \partial q_i \quad (4)$$

Por simetria, pode-se escrever $X^i(q_i, Q_{-i})^* = X^*(Q)$, pois $q_i = Q/n$ e $Q_{-i} = (n-1) \cdot Q/n$. No EN simétrico, cada firma exercerá sua opção no gatilho $X^*(Q)$. A EDO do valor da firma míope $M^i(X, q_i, Q_{-i})$ é dada por:

$$1/2 \sigma^2 M_{XX}^i + \mu(X) M_X^i - rM^i + (Q/n) D(X, Q) = 0 \quad (5)$$

Seja X^{**} o gatilho da firma míope, a condição de contorno de continuidade é satisfeita se $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M_{q_i}^i(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = I$. Pelo fato de a firma ser míope, ela ignora a competição exercendo a opção no gatilho míope X^{**} equivalente à X^* de V^i (proposição 2 de Grenadier (2002)). A condição de contorno de suavidade será satisfeita para $X(t) = X^{**}(q_i, Q_{-i})$; $M_{q_i, X}^i(X^{**}, q_i, Q_{-i}) = 0$. Pelo fato de ser míope, a firma ignora a competição, não havendo assim condições de contorno de competição.

Nesse sentido, o valor marginal da produção da firma míope será definido pela derivada parcial de $M_{q_i}^i = m^i(X)$. Neste trabalho, essa equação diferencial foi utilizada com o intuito de se concentrar no caso da estrutura de uma competição perfeita aplicando a miopia ótima de Leahy (1993).

Seja $m(X, Q)$ o valor marginal da firma míope. Pode ser verificado, por um processo semelhante ao adotado no Apêndice I, que a equação de valor é dada pela Eq. (6):

$$\frac{1}{2}\sigma(X)^2 m_{xx} + \mu(X)m_X - rm + D(X, Q) + (Q/n)D_Q(X, Q) = 0 \quad (6)$$

A Eq. (6) e duas condições de contorno (continuidade e suavidade) no gatilho $X^*(Q)$ representadas pelas Eq. (7) e (8) são suficientes para determinar $X^*(Q)$ e $m(X, Q)$.

$$m(X^*(Q), Q) = K \quad (7)$$

$$\partial m(X^*(Q), Q) / \partial X = 0 \quad (8)$$

Os termos dos fluxos de caixa da Eq. (6) constituem a parte não homogênea da EDO e compreendem a função demanda modificada. A próxima etapa deste trabalho tratará de fornecer a solução analítica a EDO (Eq. (6)).

O gatilho estratégico é igual ao gatilho “míope” X (ver Proposição 2 de Grenadier). O formato da equação diferencial ordinária é aplicado para qualquer processo estocástico de Itô. Aqui será usado o MGB: $\mu(X, t) = \mu X$ e $\sigma(X, t) = \sigma X$, em que μ é a taxa de crescimento esperado da demanda e σ a volatilidade da demanda.

3.2 O modelo de oligopólio sob incerteza: solução analítica

O oligopólio pode ser resolvido de forma simples como um problema de otimização de um único agente. Para isso, a indústria oligopolista passa a seguir uma estrutura de competição perfeita se for usada uma função de demanda modificada ou fictícia D' (Grenadier, 2002):

$$D'(X, Q) = D(X, Q) + (Q/n)D_Q(X, Q) \quad (9)$$

Para a incerteza na demanda, segue um MGB que é o processo estocástico mais usado na literatura de OR. Na modelagem dos jogos

de OR, geralmente a incerteza de mercado está associada à demanda. Aqui, ao contrário de outros trabalhos de jogos de OR, assume-se a seguinte função demanda estocástica inversa, que é linear em Q e com inclinação estocástica:

$$D(X, Q) = a + b(X(t))^{-\epsilon} Q(t) \quad (10)$$

em que $a > 0$ e $b < 0$ para garantir que $D_Q < 0$, e o expoente representa uma elasticidade. A seguir, recalcula-se a Eq. (9) a partir da especificação da demanda estocástica linear (Eq. (10)). Reescrevendo (9), tem-se a representação geral para os fluxos de caixa não homogêneos que definem o termo não homogêneo da Eq. (6) igual à Eq. (11):

$$a + bQX^{-\epsilon} \left[\frac{n+1}{n} \right] \quad (11)$$

Deve-se encontrar uma solução particular para a parte não homogênea da equação 6 que atenda toda a EDO. Tal solução particular pode ser dada pela equação do valor presente do fluxo de caixa em perpetuidade (Eq.(12)):

$$C = \frac{a}{r} + \frac{bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{-\epsilon}}{\left[r + \mu\epsilon - (\sigma^2/2) \epsilon(1+\epsilon) \right]} \quad (12)$$

O próximo passo é verificar se a solução particular dada pela Eq. (12) atende toda a EDO. Para isso, (11) deve ser substituída como termos não homogêneos do fluxo de caixa da Eq. (6), além das derivadas parciais:

$$\frac{\partial m}{\partial X} = \frac{bQ(-\varepsilon)X^{(-\varepsilon-1)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial X^2} = \frac{(\varepsilon^2 + \varepsilon)bQX^{(-\varepsilon-2)}\left[\frac{n+1}{n}\right]}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (14)$$

Fazendo as devidas substituições e com um esforço algébrico, verifica-se que a equação 12 é a solução particular que atende a EDO (6). Com isso, a equação (6) pode ser reescrita no formato completo (homogênea e não homogênea), que permitirá encontrar a solução para $X^*(Q)$ (Eq. (15)):

$$\frac{1}{2}\sigma(X)^2 m_{xx} + \mu(X)m_x - rm + C = 0 \quad (15)$$

Observa-se que os três primeiros termos da equação 15 formam uma EDO homogênea e parabólica, que tem solução analítica geral da forma da Eq. (16):

$$m(X) = AX^\beta \quad (16)$$

em que β é um parâmetro e A é uma constante, que, junto com o gatilho X , serão obtidos por meio de duas condições de contorno. Dixit e Pindyck (1994) explicam que, para determinar o parâmetro β , é necessário encontrar as raízes da equação quadrática gerada a partir da substituição da equação 16 e suas derivadas parciais na parte homogênea da equação diferencial ordinária (15):

$$1/2\sigma^2 X^2 A\beta(\beta-1)X^{\beta-2} + \mu X A\beta X^{\beta-1} - rAX^\beta \quad (17)$$

Após algumas manipulações algébricas, cancela-se o termo $A X^\beta$ e obtém-se a equação

característica quadrática da parte homogênea da EDO:

$$1/2\sigma^2\beta(\beta-1)^2 + \mu\beta - r = 0 \quad (18)$$

A equação 17 é uma equação quadrática que possui duas raízes para β . Sendo uma equação quadrática, as duas raízes de β podem ser encontradas facilmente:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2} > 1 \quad (19)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\frac{2r}{\sigma^2} + \left[\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2} < 0 \quad (20)$$

Tendo duas raízes, a solução homogênea é dada por uma combinação linear das duas soluções: $m(X) = A_1 X^{\beta_1} + A_2 X^{\beta_2}$. Mas, como β_2 é negativo, é necessário que $A_2 = 0$; caso contrário, quando o choque da demanda X tendesse a zero, o valor da firma tenderia a infinito, o que não tem sentido econômico.

Considerando as condições de contorno de continuidade e suavidade no gatilho X , dadas pelas equações (7) e (8), chega-se a um sistema com duas equações e duas incógnitas (A_1 e X):

$$\begin{cases} A_1 X^{*\beta_1} + C = k \\ A_1 \beta_1 X^{*(\beta_1-1)} - \varepsilon X^{*-1} C = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Resolvendo o sistema, determina-se a constante A_1 e o gatilho $X^*(Q)$:

$$A_1 = \frac{bQ(\varepsilon)\left[\frac{n+1}{n}\right]X^{(-\varepsilon-\beta_1)}}{\left[r + \mu\varepsilon - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\varepsilon(1+\varepsilon)\right]} \quad (22)$$

Substituindo (22) na primeira equação do sistema dado por (21), obtém-se:

$$rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} + a\beta_1 \left[r + \mu\varepsilon - (\sigma^2/2)\varepsilon(1+\varepsilon) \right] + r\beta_1 bQ \left[\frac{n+1}{n} \right] X^{(-\varepsilon)} = kr\beta_1 \left[r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon) \right]$$

que, simplificando e rearranjando, tem-se:

$$X^{-\varepsilon} = \frac{\beta_1 (kr - a) \left[r + \mu\varepsilon - 0,5\sigma^2\varepsilon(1+\varepsilon) \right]}{(\beta_1 + \varepsilon) rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]}$$

Reordenando os termos, chega-se à expressão para o gatilho ótimo em equilíbrio de Nash, representado pela Eq. (23):

$$X^*(Q) = \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \varepsilon} \right) \left(\frac{rk - a}{rbQ \left[\frac{n+1}{n} \right]} \right) \left[r + \mu\varepsilon - (\sigma^2/2)\varepsilon(1+\varepsilon) \right] \right\}^{(-1/\varepsilon)} \quad (23)$$

O resultado gerado pela solução analítica desse modelo sob incerteza é importante por permitir a extensão de resultados que possuem solução analítica simplificada dos casos de competição perfeita para um modelo de oligopólio. No oligopólio, as firmas adicionam capacidade (exercem a opção real) numa quantidade tal que o preço é refletido para baixo, em razão da oferta adicional. É possível notar que o gatilho $X^*(Q)$ decresce com o número de firmas no oligopólio (n).

A dinâmica de exercícios de opções quando a demanda X atinge o gatilho X^* pode ser identificada quando todas as n firmas exercem suas opções de expansão e adicionam oferta para a indústria, de forma que os preços não conseguem superar um nível máximo. Ao exercer a opção estratégica no oligopólio de n -firmas, tem-se um prêmio da opção, que pode ser definido como o VPL em $X^*(Q)$, por unidade de investimento.

4 Aplicação: mercado imobiliário residencial da cidade do Rio de Janeiro

O mercado imobiliário da cidade do Rio de Janeiro passou por diversas transformações que

o levaram a ser considerado o metro quadrado mais caro do Brasil no início da década de 2010. Dentre os fatores que contribuíram para o aquecimento do setor imobiliário do Rio de Janeiro, podem ser destacados o cenário político-econômico, a expansão do crédito, o aumento da renda média da população, a implantação das Unidades de Polícia Pacificadora (UPPs) e as expectativas positivas derivadas dos investimentos para a Copa do Mundo de 2014 e para as Olimpíadas de 2016. Com os investimentos em infraestrutura, saneamento, mobilidade urbana e construção civil, que visavam preparar a cidade para os Jogos Olímpicos, a valorização dos imóveis tornou-se crescente a partir de 2010 e o imóvel tornou-se um sinônimo de investimento rentável na cidade.

De acordo com o Sindicato das Empresas de Compra, Venda, Locação e Administração de Imóveis e dos Condomínios Residenciais e Comerciais do Estado do Rio de Janeiro (Secovi-Rio), em razão da proximidade com os locais de competição, bairros como Barra da Tijuca, Centro, Jacarepaguá, Maracanã e Tijuca tiveram valorização de 20% a 152% nos preços de locação dos imóveis em um período de seis meses

após o pronunciamento do Comitê Olímpico Internacional.

Tradicionalmente, os investimentos em mercados imobiliários caracterizam-se como intensivos em capital, de baixa liquidez, e apresentam de incerteza de demanda, de preço e nos custos de construção, o que eleva o risco percebido pelos investidores.

Para estimar os parâmetros do modelo, foram utilizadas séries de valores mensais médios do metro quadrado de apartamentos residenciais de dois quartos, que são o modelo padrão indicado para ser a amostra representativa da realidade do mercado imobiliário da região escolhida para análise. De acordo com o Secovi-Rio (2015), apartamentos de dois quartos são os que possuem maior demanda e oferta e maior liquidez dentre as opções do mercado de imóveis residenciais.

Uma das limitações dessas séries históricas de preços de venda dos apartamentos residenciais é que elas não possuem equalização dos dados que permitam considerar diferenças de preço entre unidades de mesmo tamanho, mas de diferentes

características, tais como andar, vista, estado de conservação, quadra da praia, rua de grife, vaga de garagem etc. Tais características podem levar as séries de preços a não refletirem a variação real nos preços. A seguir, encontra-se uma breve descrição dos dados utilizados.

4.1 Dados

As séries históricas para os preços de venda, aluguel e condomínio dos imóveis localizados nos 17 bairros pertencentes ao município do Rio de Janeiro têm início em junho de 2009 e término em janeiro de 2016, e foram disponibilizadas pelo Secovi-Rio (<http://www.secovirio.com.br/Produtos-e-Servicos/Pesquisas-e-Indicadores-163>, recuperado em 2 de fevereiro de 2016). A limitação dos dados encontrados no Secovi-Rio fez que a análise se restringisse aos 17 bairros mostrados na Tabela 1, que mostra os valores nominais médios por metro quadrado de cada bairro que forma o grupo representativo da região da cidade analisada neste trabalho.

Tabela 1

Valores nominais médios por m² para o período junho de 2009 a janeiro de 2016

Bairros	Valores Nominais Médios (por m ²)		
	Preço de venda	Aluguel	Condomínio
Barra da Tijuca	7.443	30,96	9,78
Botafogo	9.809	38,70	7,28
Centro	5.878	25,62	5,52
Copacabana	10.112	39,67	7,05
Flamengo	9.128	35,07	6,63
Gávea	13.508	46,75	8,40
Ilha do Governador	4.003	16,87	3,82
Ipanema	14.985	59,70	8,66
Jacarepaguá	3.926	15,57	5,53
Jardim Botânico	12.327	44,50	7,95
Lagoa	13.638	48,25	8,84
Laranjeiras	8.646	33,60	6,61
Leblon	16.871	58,38	8,63
Méier	3.686	15,41	5,33
Recreio	5.962	22,95	6,75
Tijuca	5.553	23,49	5,76
Vila Isabel	4.570	20,24	5,32
Média	8.826	33,87	6,93

Nota: Fonte: Recuperado de Secovi-Rio. *Panorama do mercado imobiliário do Rio de Janeiro 2015*. Recuperado de <<http://www.secovirio.com.br/Produtos-e-Servicos/Pesquisas-e-Indicadores-163>>.

4.2 Estimação dos parâmetros do modelo

Para estimar os parâmetros do modelo, usou-se a série de preços médios deflacionada pelo IPCA, construída a partir da média de preços nominais do conjunto de bairros mostrado na Tabela 1. Com relação à modelagem do processo estocástico, Dixit e Pindyck (1994) recomendam que a adequação do processo estocástico à evolução da série do ativo analisado seja confirmada por meio de testes econométricos.

Um teste tradicionalmente usado para examinar se a série é não estacionária é o teste de Dickey Fuller Aumentado (ADF). Pindyck (1999) sugere, contudo, que o teste ADF não é suficiente para determinar a escolha do processo estocástico e defende o teste de razão de variância como uma alternativa. Esse teste fornece mais informações a respeito do comportamento da série do que o teste de raiz unitária, ao mensurar o grau em que a variância da série cresce à medida que o número de defasagens aumenta. O teste é descrito pela equação (25):

$$R_k = \frac{1}{k} \frac{\text{Var}(p_{t-k} - p_t)}{\text{Var}(p_{t+1} - p_t)} \quad (25)$$

Para o MGB, a razão das variâncias se aproxima de 1 à medida que k cresce, com variância aumentando linearmente com k . A partir da variação dos *lags* de 2 a 79 dos logaritmos da série de preços deflacionada, os resultados desse teste indicaram que a razão da variância aumentou com o aumento do número de *lags*. Esse comportamento é consistente com um modelo no qual os preços se comportam como um Movimento Geométrico Browniano. A próxima etapa trata de estimar os parâmetros do MGB.

Como em Dias (2015), os parâmetros α e σ podem ser estimados a partir da regressão linear trivial em tempo discreto com observações consecutivas (Eq. (26)).

$$\ln[P(t)] = \Theta + \ln[(P_{t-1})] + \varepsilon_t \quad (26)$$

em que ε_t é o erro da regressão e tem distribuição normal e parâmetros $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2/N)$, e N

representa o número de períodos por ano da observação dos dados, que neste trabalho foi usado $N = 12$. Os parâmetros do MGB foram estimados neste trabalho com as equações (27) e (28).

$$\mu = N \left\{ E \left[\ln \left[P_t / P_{t-1} \right] \right] + \sigma^2 / 2N \right\} \quad (27)$$

$$\sigma^2 = N \text{Var} \left[\ln \left[P_t / P_{t-1} \right] \right] \quad (28)$$

Na equação de regressão (26) foi assumido que o coeficiente de $\ln(P_{t-1})$ é igual a 1, sendo análogo à equação discreta do MGB.

A taxa de dividendos foi calculada por meio da relação $\delta = \frac{\text{Aluguel} + \text{Condomínio}}{\text{Valor do Imóvel}}$ (Costa & Samanez, 2008). Foi encontrado o valor de 5,54% para os dividendos médios da região analisada. Esse resultado mostra se o proprietário pode obter benefícios ao decidir alugar seu apartamento; para tanto, deve-se comparar a taxa de dividendo com outras taxas de rentabilidade de investimentos ou mesmo com a poupança.

Pelo fato de projetos reais de investimento no setor imobiliário terem características de longo prazo, torna-se razoável utilizar uma taxa de juros também de longo prazo. Portanto, a taxa de juros livre de risco (r) utilizada neste trabalho está baseada na taxa de retorno dos títulos soberanos de dez anos de maturidade do governo brasileiro, atualmente no valor de 10,88% a.a. (<https://www.bloomberg.com.br/>, recuperado em 20 de junho de 2017).

De posse dessas informações, os valores percentuais anuais das estimativas para a tendência de crescimento (μ) e para as volatilidades (σ) são 5,51% a.a. e 16,44% a.a., respectivamente. A quantidade ofertada é determinada de forma exógena ao modelo, então o valor usado para Q ($t = 0$) foi de 12.550 apartamentos (fonte: Secovi-Rio). Esse valor foi transformado em m^2 , considerando a metragem de 60 m^2 , que é o tamanho médio padrão dos apartamentos de dois quartos.

A próxima etapa foi estimar os parâmetros da equação da demanda (Eq. (10)). A variável estocástica escolhida foi a série mensal de preços

reais dos imóveis com uma defasagem. O primeiro passo foi explicar como $X(t)$ afeta a demanda. Para isso, foi feito o procedimento de identificação de um processo ARIMA através das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Constatou-se que ela foi declinante na FAC e truncou na ordem 1 na FACP. Com isso, verificou-se que $X(t)$ é um processo autorregressivo de primeira ordem. Portanto, aplicando o logaritmo em ambos os lados da equação (10), foi possível estimar, através de uma regressão linear, os parâmetros de interesse para o cálculo do gatilho no equilíbrio de Nash, a saber: $\alpha=9715,23$, $b=-0,031$ e $\varepsilon=0,97$.

5 Resultados e sensibilidades

A partir da modelagem dos processos estocásticos desenvolvida na Seção 4, foram

utilizados os parâmetros estimados a partir dos dados do mercado imobiliário carioca, como σ e μ . Além dos parâmetros envolvidos na equação da demanda, a taxa livre de risco r , a quantidade ofertada inicial $Q(t=0)$, a elasticidade do processo estocástico ε , o investimento (K) definido no modelo como sendo igual a uma unidade e os parâmetros a e b da equação de demanda são variáveis necessárias para a solução do modelo.

Como forma de simplificar a análise foi considerado que as empresas construtoras ou incorporadoras já possuem o terreno para iniciar a construção. Os valores críticos de $X^*(Q)$ representam o gatilho ótimo de investimento no equilíbrio de Nash e estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 2

Relação entre gatilhos ótimos e o número de empresas concorrentes

Nº de empresas	2	4	5	7	9	10
$X^*(Q)$	4,74	3,92	3,77	3,58	3,47	3,44

Assim, no contexto de investimento no mundo real, o retorno financeiro de uma empresa está ligado às estratégias de investimento de seus concorrentes. Nesse sentido, os resultados da Tabela 2 mostram os efeitos da competição na determinação dos gatilhos. No caso de um duopólio ($n = 2$), o gatilho ótimo em EN foi de R\$ 4,74 por unidade de investimento. Analisando estruturas oligopolistas a partir de três empresas, por exemplo, ao considerar quatro empresas concorrentes, o gatilho ótimo de investimento é igual R\$ 3,92, sendo reduzido para R\$ 3,44 por unidade de investimento ao incorporar dez empresas concorrentes no modelo de oligopólio desenvolvido.

A Figura 1 ilustra a situação em que o gatilho diminui com o aumento da competição, uma vez que $X^*(Q)$, definido pela equação (23), é uma função decrescente de n . Isso pode ser visto como um comportamento da empresa i frente à entrada de um ou mais rivais, em que a

opção de adiar torna-se menos valiosa, levando as construtoras a exercerem suas opções mais cedo.

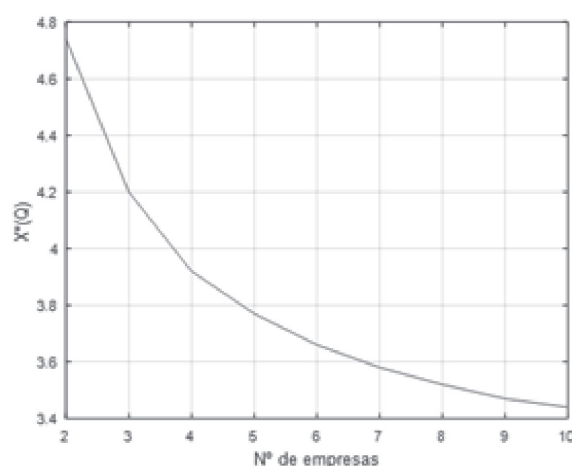


Figura 1. Gatilhos ótimos \times Nº de empresas concorrentes

De posse dos principais resultados do modelo desenvolvido neste artigo, torna-se importante ilustrar uma comparação entre as

variações nos gatilhos ótimos em equilíbrio em relação às diversas variáveis do modelo. Os gatilhos foram recalculados estressando-se os principais parâmetros que aparecem na equação do gatilho (Eq. (23)). Para cada um dos casos, as Figuras 2, 3 e 4 ilustram o comportamento dos gatilhos ótimos de investimento no equilíbrio relacionados às variações dos parâmetros volatilidade, taxa de juros livre de risco e elasticidade do processo estocástico da demanda. Os gatilhos foram recalculados com n fixo igual a quatro empresas, variando os parâmetros.

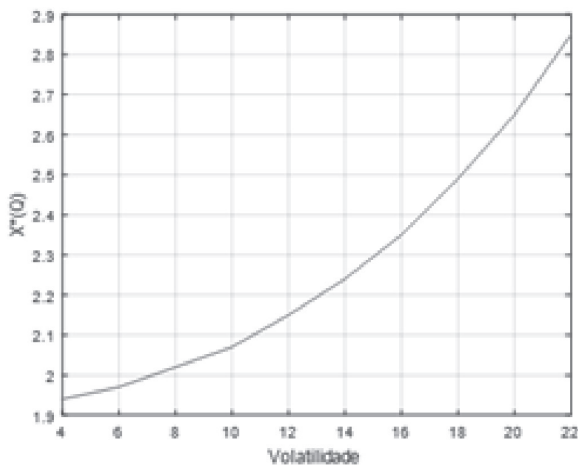


Figura 2. Sensibilidade da volatilidade

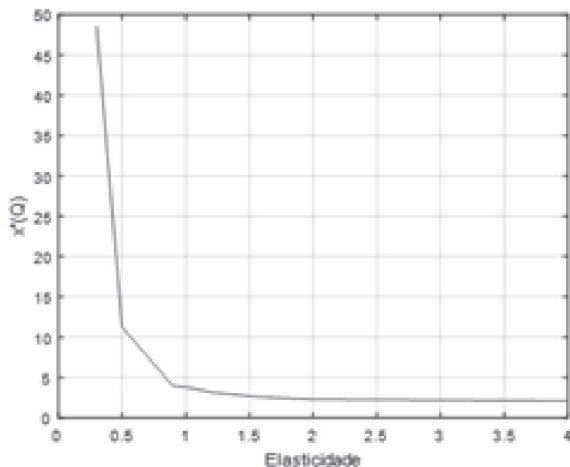


Figura 3. Sensibilidade da elasticidade

A Figura 2 mostra que uma variação positiva na volatilidade do MGB eleva positivamente

o valor do gatilho. Tal fato é verificado na Eq. (23), em que a volatilidade afeta positivamente o último termo da equação bem como o termo β_1 , descrito pela Eq. (19), impactando o gatilho na mesma direção.

A Figura 3 ilustra a variação do gatilho a partir de alterações na elasticidade do processo estocástico da demanda que compõe a função de demanda utilizada no modelo de oligopólio. A elasticidade denota uma ideia de sensibilidade da demanda em relação às variações do processo. Assim, quanto menos sensíveis são os compradores de imóveis às variações de preços, maior tende a ser o gatilho ótimo no equilíbrio. O modelo mostra-se menos sensível às variações na elasticidade quando ela é maior ou igual a 1. Tal fato é consistente com o conceito clássico de elasticidade abordado pela literatura microeconômica.

O modelo desenvolvido a partir de uma especificação diferente para a demanda estocástica produziu um gatilho ótimo no equilíbrio de Nash interessante do ponto de vista das interpretações econômicas, fornecendo mais informações a respeito do caminho que os gatilhos podem seguir permitindo às empresas ajustarem sua produção. Além disso, os resultados obtidos neste trabalho podem ser comparados (além do modelo de Grenadier) ao resultado encontrado por Williams (1993), que compartilha da propriedade geral, demonstrando que há uma queda no valor do gatilho em razão do aumento da competição.

A partir das análises de sensibilidade foi possível perceber que, no modelo desenvolvido neste artigo, o gatilho ótimo é menos sensível às variações dos parâmetros quando comparado ao gatilho encontrado por Grenadier.

6 Conclusões

As decisões de investimento de capital das empresas são, na maioria das vezes, tomadas dentro de um ambiente de competição estratégica com as demais empresas do setor, em que as ações de uma empresa afetam a decisão das demais. Neste artigo, analisamos como a combinação da Teoria dos Jogos com as Opções Reais pode colaborar na análise econômica de investimentos em novos projetos no mercado imobiliário, dando suporte ao processo de tomada de decisão por parte dos gestores. Este trabalho traz contribuições para a literatura ao modificar o

modelo de Grenadier a partir de uma especificação da incerteza na demanda mais adequada, que permitiu interpretações econômicas mais robustas a respeito da demanda por imóveis, mostrando quantitativamente como a concorrência pode impactar nas decisões estratégicas.

Os resultados encontrados para imóveis localizados em uma região da cidade do Rio de Janeiro indicaram que as estratégias ótimas para novos investimentos em projetos imobiliários é investir no gatilho ótimo em equilíbrio de Nash no valor de R\$ 4,74 por unidade de investimento, ao se considerar um duopólio e no gatilho de R\$ 3,77 para um oligopólio formado por cinco empresas. Para o caso de um oligopólio com dez rivais, a estratégia ótima é a de investir no gatilho ótimo igual a R\$ 3,44 por unidade de investimento. Essas estratégias de investimento são importantes para os investidores do mercado imobiliário, uma vez que os resultados indicam que os gatilhos em equilíbrio de Nash permitem aumentos incrementais na construção de imóveis toda vez que o choque na demanda atinge o gatilho ótimo encontrado por meio da solução analítica fornecida neste trabalho.

A partir dos resultados obtidos para as estratégias de exercício da opção foi possível comparar oligopólios, em termos de níveis de investimento e produção, mostrando a evolução da demanda para a estrutura em oligopólio, e indicando que a produção total foi maior para o caso de oligopólio com dez empresas concorrentes do que para os duopólios e monopólios.

Os resultados deste trabalho podem ser úteis para os diferentes agentes econômicos do setor imobiliário do Rio de Janeiro. Políticas públicas que incentivem a participação de um maior número de empresas imobiliárias podem contribuir para o aumento da arrecadação de impostos para o Governo do Estado e Prefeitura do Rio de Janeiro, uma vez que os resultados sugerem que o investimento e a produção de apartamentos residenciais foi maior no oligopólio formado por dez empresas do que no caso dos monopólios e duopólios. Para as incorporadoras de imóveis, os resultados indicam que a maior concorrência reduz o valor da opção de espera e o gatilho ótimo do investimento, o que leva as empresas a exercerem suas opções mais cedo, aumentando a quantidade de imóveis, mas reduzindo seu preço. Por outro lado, o investimento imobiliário por

parte das empresas mostrou-se bastante sensível às variações da elasticidade da demanda, o que tem também impactos para os compradores e investidores.

Foram calculadas as estratégias de exercício no equilíbrio considerando que as construções seriam imediatas. Para que o modelo represente de forma mais consistente o mercado imobiliário residencial, pode-se incluir como sugestão de trabalhos futuros o impacto dos impostos e do tempo de construção, uma vez que uma importante característica dos investimentos imobiliários é o longo período necessário para serem completados.

Agradecimentos

Marco A. G. Dias agradece ao suporte financeiro da Petrobras/Cenpes por meio do projeto FlexWell. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- Aguerrevere, F. L. (2009). Real options, product market competition, and asset returns. *Journal of Finance*, 64(2), 957-983. doi:10.1111/j.1540-6261.2009.01454.x
- Baldursson, F. M. (1998). Irreversible investment under uncertainty in oligopoly. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 22(4), 627-644. doi:10.1016/s0165-1889(97)00070-5
- Bloomberg (2017). Bloomberg terminal. Retrieved from <https://www.bloomberg.com.br/>
- Chevalier-Roignant, B., & Trigeorgis, L. (2011). *Competitive strategy: Options and games*. Cambridge: Mass: MIT Press.
- Costa, F. A., & Samanez, C. P. (2008). Teoria dos jogos e opções reais: Uma aplicação no mercado imobiliário brasileiro. *Revista Brasileira de Economia de Empresas*, 8(2), 57-62.
- Costa, L. D., Azevedo, F. P., & Samanez, C. P. (2015). Investment strategies in the Brazilian industry of aluminum cans: An analysis in the

context of real options games. *RBGN-Revista Brasileira de Gestao de Negocios*, 17(57), 1246-1263. doi:10.7819/rbgn.v17i57.2253

Dias, M. A. G. (2015). *Análise de Investimentos com opções reais: Teoria e prática com aplicações em petróleo e em outros setores* (Vol. 2). Rio de Janeiro: Interciência.

Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. New Jersey: Princeton University Press.

Fortunato, G., Brandao, L. E. T., Rozenbaum, S., & Rebello, A. P. (2008). Valor da opcao de abandono em lancamentos imobiliarios residenciais. *RAC-Electronica*, 2(3), 531.

Grenadier, S. R. (1996). The strategic exercise of options: Development cascades and overbuilding in real estate markets. *Journal of Finance*, 51(5), 1653-1679. doi:10.2307/2329533

Grenadier, S.R. (2000). Option Exercise Games: The Intersection of Real Options and Game Theory. *Journal of Applied Corporate Finance*, 13(2), 99-107.

Grenadier, S. R. (2002). Option exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms. *Review of Financial Studies*, 15(3), 691-721. doi:10.1093/rfs/15.3.691

Grenadier, S. R. (2005). An equilibrium analysis of real estate leases. *Journal of Business*, 78(4), 1173-1213.

Holland, A. S., Ott, S. H., & Riddiough, T. J. (2000). The Role of uncertainty in investment: An examination of competing investment models using commercial real estate data. *Real Estate Economics*, 28(1), 33-64. doi:10.1111/1540-6229.00792

Huisman, K. (2000). *Technology investment: A game theoretic real options approach*. Netherlands: Tilburg University.

Leahy, J. V. (1993). Investment in competitive equilibrium: The optimality of myopic behavior. *Quarterly Journal of Economics*, 108(4), 1105-1133. doi:10.2307/2118461

Murto, P., Näsäkkälä, E., & Keppo, J. (2004). Timing of investments in oligopoly under uncertainty: A framework for numerical analysis. *European Journal of Operational Research*, 157(2), 486-500. doi:10.1016/S0377-2217(03)00234-0

Pindyck, R. S. (1999). The long-run evolution of energy prices. *Energy Journal*, 20(2), 1-27.

Porter, M. E. (1992). Capital disadvantage: America's falling capital investment system. *Harvard Business Review*, 70(5), 65-82.

Quigg, L. (1993). Empirical testing of real option pricing models. *Journal of Finance*, 48(2), 621-640. doi:10.1111/j.1540-6261.1993.tb04730.x

Rocha, K., Salles, L., Garcia, F. A. A., Sardinha, J. A., & Teixeira, J. P. (2007). Real estate and real options: A case study. *Emerging Markets Review*, 8(1), 67-79. doi:10.1016/j.ememar.2006.09.008

SECOVI-Rio. (2015). *Panorama do mercado imobiliário do Rio de Janeiro 2015*. Rio de Janeiro: Secovi Rio.

Smit, H. Y. J., & Ankum, L. A. (1993). A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition. *Financial Management*, 241-250.

Thijssen, J. J. J., Huisman, K. J. M., & Kort, P. M. (2012). Symmetric equilibrium strategies in game theoretic real option models. *Journal of Mathematical Economics*, 48(4), 219-225. doi:10.1016/j.jmateco.2012.05.004

Titman, S. (1985). Urban land prices under uncertainty. *The American Economic Review*, 75(3), 505-514.

Wang, K., & Zhou, Y. (2006). Equilibrium real options exercise strategies with multiple players: The case of real estate markets. *Real Estate Economics*, 34(1), 1-49. doi:10.1111/j.1540-6229.2006.00158.x

Williams, J. (1991). Real state development as an option. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, 4(2), 191-208.

Williams, J. (1993). Equilibrium and options on real assets. *The Review of Financial Studies*, 6(4), 825-850.

Apêndice - Etapas para obter a equação 3 pelo método do portfólio replicante

Seja $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ o valor de equilíbrio para cada firma i com fluxo de lucros $\pi(X, q_i, Q_{-i})$. Montase um portfólio replicante para o risco e o retorno da firma V_i de forma que: investe-se \$ 1 em ativo sem risco e compram-se n unidades de imóveis ao preço X (ηX) com custo $(1 + nX)$, mantendo-o por um período dt .

O retorno desse portfólio será: o valor de \$ 1 à taxa livre de risco r em, ou seja $dt = rdt$ e ηX investido durante dt , que rende $\eta X \delta dt$ (dividendo) mais um ganho de capital $ndx \cdot X(t)$. $X(t)$ varia aleatoriamente seguindo um MGB, portanto: $dX = \alpha X dt + \sigma X dz$.

Assim, $ndX = \eta \alpha dt + \eta \sigma X dz$. Com isso, o retorno total será:

$$rdt + \eta X \delta dt + ndX = (r + \eta(\alpha + \delta)X)dt + \eta \sigma X dz$$

Para obter a taxa de retorno do portfólio, divide-se o retorno total pelo investimento inicial:

$$\frac{r + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} dt + \frac{\sigma X \eta}{1 + \eta X} dz. \text{ As notações } V^i(X, q_i, Q_{-i}) \text{ e } \pi(X, q_i, Q_{-i}) \text{ serão alteradas para } V^i \text{ e } \pi(X, t),$$

respectivamente.

Comparando a um investimento na empresa i , tem-se o custo do investimento igual $\$V^i(X, t)$ e o retorno dado por:

- Dividendo em $dt = \pi(X, t)$ que não tem risco (determinístico)
- Ganho de capital = $dV^i(X, t)$, com risco (estocástico)

Pelo Lema de Itô:

$$dV^i = \left[\alpha X \frac{\partial V^i}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V^i}{\partial X^2} + \frac{\partial V^i}{\partial t} \right] dt + \sigma X \frac{\partial V^i}{\partial X} dz$$

O retorno total será: $\frac{\pi(X, t) dt + dV^i}{V^i(X, t)}$. Substituindo o termo dV^i , separando a parte determinística

da parte estocástica e alterando a notação das derivadas parciais, a expressão para o retorno fica:

$$\frac{\pi(X, t) + \alpha X V_x^i + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + V_t^i}{V^i(X, t)} dt + \frac{V_x^i \sigma X}{V^i(X, t)} dz$$

Assim, para que ambos investimentos tenham o mesmo risco, a parcela com risco tem que ser igual

nos dois casos: $\frac{\sigma X \eta}{1 + \eta X} dz = \sigma X \frac{\partial V^i}{\partial X} dz$. Portanto:

$$\frac{X\eta}{1+\eta X} = \frac{\partial V^i}{\partial X} \tag{A-1}$$

No mercado, os ativos com mesmo risco devem ter o mesmo retorno. Podem-se assim igualar as parcelas dos retornos sem risco:

$$\frac{\pi(X,t) + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + \alpha X V_x^i + V_t^i}{V^i(X,t)} dt = \frac{r + \eta(\alpha + \delta)X}{1 + \eta X} \tag{A-2}$$

$$\frac{r + \eta(\alpha + \delta)X}{1 + \eta X} = \frac{r(1 + \eta X - \eta X) + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = \frac{r(1 + \eta X) - r\eta X}{1 + \eta X} + \frac{\eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X}$$

$$\frac{r(1 + \eta X)}{1 + \eta X} - \frac{r\eta X}{1 + \eta X} + \frac{\eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + \frac{(\alpha + \delta)\eta X}{1 + \eta X} \tag{A-3}$$

Substituindo (A-1) em (A-3):

$$r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + \frac{(\alpha + \delta)\eta X}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{\eta X}{1 + \eta X} \right) + (\alpha + \delta) \frac{V_{xx}^i}{V^i(X,t)} \text{ e substituindo esse resultado em (A-2), tem-se:}$$

$$\frac{r + \eta X(\alpha + \delta)}{1 + \eta X} = r \left(1 - \frac{V_x^i X}{V^i(X,t)} \right) + (\alpha + \delta) \frac{V_x^i X}{V^i(X,t)} = \frac{\pi(X,t) + 1/2 \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + \alpha X V_x^i + V_t^i}{V^i(X,t)}$$

Reescrevendo e simplificando, chega-se à EDP:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + (r - \delta) X V_x^i - r V^i + V_t^i + \pi(X,t) = 0 \tag{A-4}$$

Para modelos de avaliação de projetos imobiliários, entretanto, trabalha-se com opções de compra perpétuas, não existindo data limite para exercício da opção. Assim, pode-se considerar $V_t^i = 0$, pois a pura passagem do tempo não afeta o valor de V, que continuaria com um horizonte perpétuo para exercer a opção. Com isso, a EDP passa ser uma EDO, em que o termo $r - \delta$ da Eq. (A-4) está representado por μ . Retornando à notação $V^i(X, q_i, Q_{-i})$ e $\pi(X, q_i, Q_{-i})$ iniciais, obtém-se a Eq. (3) da seção 3.1 deste artigo:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 V_{xx}^i + \mu X V_x^i - r V^i + \pi_i(X, q_i, Q_{-i}) = 0$$

Sobre os autores:


1. Glaudiane Lilian de Almeida, PhD em Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: glaudianealmeida@gmail.com

ORCID

 0000-0001-5550-8360

2. Marco Antonio Guimarães Dias, PhD em Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: marcoagd08@gmail.com

ORCID

 0000-0003-0852-0716

3. Luiz Eduardo T. Brandão, PhD em Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: brandao@iag.puc-rio.br

ORCID

 0000-0002-5389-0583

4. Carlos Patricio Mercado Samanez (*in memoriam*), PhD em Finanças, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, Brasil. E-mail: cps@puc-rio.br

ORCID

 0000-0003-4218-2562

Contribuição dos autores

Contribuição	Glaudiane Lilian de Almeida	Marco Antonio Guimarães Dias	Luiz Eduardo T. Brandão	Carlos Patricio Mercado Samanez
1. Definição do problema de pesquisa	√			√
2. Desenvolvimento das hipóteses ou questões de pesquisa (trabalhos empíricos)	√	√	√	
3. Desenvolvimento das proposições teóricas (ensaios teóricos)				
4. Fundamentação teórica/Revisão de literatura	√	√	√	
5. Definição dos procedimentos metodológicos	√	√	√	
6. Coleta de dados	√			√
7. Análise estatística	√	√		
8. Análise e interpretação dos dados	√	√	√	
9. Revisão crítica do manuscrito		√	√	
10. Redação do manuscrito	√			